Numerička matematika — 1. kolokvij (27. travnja 2009.)

Zadatak 1 (10 bodova.) "Teorijsko pitanje".

(A) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti LR faktorizacije** kvadratne matrice reda n.

(B) Napišite definiciju **dijagonalne dominantnosti po stupcima** za kvadratnu matricu A reda n.

 (a) Ako je matrica $A = A^{(1)}$ dijagonalno dominantna po stupcima, što vrijedi za matrice $A^{(k+1)}$ na kraju k-tog koraka Gaussovih eliminacija?

 (b) Može li **parcijalno** pivotiranje dati drugačiju konačnu matricu $R = A^{(n)}$? Ukratko argumentirajte ovaj odgovor.

(C) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti interpolacije** zadanih podataka polinomom stupnja najviše n.

(D) Napišite definiciju **pozitivne definitnosti** za kvadratnu matricu A reda n i navedite neka ekvivalentna svojstva.

 (a) Ako je matrica $A = A^{(1)}$ pozitivno definitna, što vrijedi za matrice $A^{(k+1)}$ na kraju k-tog koraka Gaussovih eliminacija?

 (b) Može li **parcijalno** pivotiranje dati drugačiju konačnu matricu $R = A^{(n)}$? Ukratko argumentirajte ovaj odgovor.

Zadatak 2 (10 bodova.) Računanje vrijednosti funkcije iz Taylorovog reda.

(A) U zadanoj točki x, vrijednost funkcije

$$f(x) = x \cos x - x$$

aproksimiramo nekim početnim komadom Taylorovog reda oko 0, tako da članove reda zbrajamo uzlazno po potencijama od x, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako računanje za $x = 15\pi$ provedemo u aritmetici računala, hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(B) U zadanoj točki x, vrijednost funkcije

$$f(x) = x \operatorname{sh} x - x^2$$

aproksimiramo nekim početnim komadom Taylorovog reda oko 0, tako da članove reda zbrajamo uzlazno po potencijama od x, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako računanje za $x = 30$ provedemo u aritmetici računala, hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(C) U zadanoj točki x, vrijednost funkcije

$$f(x) = x \sin x - x^2$$

aproksimiramo nekim početnim komadom Taylorovog reda oko 0, tako da članove reda zbrajamo uzlazno po potencijama od x, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako računanje za $x = 15\pi$ provedemo u aritmetici računala, hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(D) U zadanoj točki x, vrijednost funkcije

$$f(x) = x \operatorname{ch} x - x$$

aproksimiramo nekim početnim komadom Taylorovog reda oko 0, tako da članove reda zbrajamo uzlazno po potencijama od x, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako računanje za $x = 30$ provedemo u aritmetici računala, hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

Zadatak 3 (10 bodova.) Linearni sustav LR faktorizacijom s parcijalnim pivotiranjem.

(A) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -11 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

(B) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

(C) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

(D) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

Zadatak 4 (10 bodova.) Faktorizacija Choleskog ovisno o parametru.

(A) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2x^2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & x^2 \end{bmatrix},$$

gdje je $x \geq 0$ realni parametar. Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji faktorizacija Choleskog matrice $A(x)$. Za te vrijednosti izračunajte i pripadnu faktorizaciju Choleskog.

(B) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2x^2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & x^2 \end{bmatrix},$$

gdje je $x \geq 0$ realni parametar. Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji faktorizacija Choleskog matrice $A(x)$. Za te vrijednosti izračunajte i pripadnu faktorizaciju Choleskog.

(C) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2x^2 \end{bmatrix},$$

gdje je $x \geq 0$ realni parametar. Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji faktorizacija Choleskog matrice $A(x)$. Za te vrijednosti izračunajte i pripadnu faktorizaciju Choleskog.

(D) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2x^2 \end{bmatrix},$$

gdje je $x \geq 0$ realni parametar. Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji faktorizacija Choleskog matrice $A(x)$. Za te vrijednosti izračunajte i pripadnu faktorizaciju Choleskog.

Zadatak 5 (10 bodova.) Interpolacija polinomima, Newtonov oblik.

(A) Funkciju

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 2$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite uniformnu ocjenu pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1$ i pripadnu pravu pogrešku.

(B) Funkciju

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite uniformnu ocjenu pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 4]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 2$ i pripadnu pravu pogrešku.

(C) Funkciju

$$f(x) = e^x \cos x$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite uniformnu ocjenu pogreške ove interpolacije na intervalu $[-1, 1]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 0$ i pripadnu pravu pogrešku.

(D) Funkciju

$$f(x) = (x - 3)e^x$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = -3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite uniformnu ocjenu pogreške ove interpolacije na intervalu $[-3, 1]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = -1$ i pripadnu pravu pogrešku.